→ Aussagen über Logik / über Formeln

Meta-Ebene

- Gültigkeit ⇝ Formale Semantikdef.
- Beziehungen zwischen Formeln
  - Äquivalenz → beweisen auf Metaebene
  - Folgerungsrelation → Automatisches Beweisen ⇒ Reasoner

⇒ Aussagen über Domain

→ Logik: FOL, um Spezifikation eines Domains zu machen

Logik/Domain-Ebene

- $\exists x$: Hund(x) ∧ Säugetier(x)
- $\forall x$: Hund(x) → Säugetier(x) ← FOL

Hund ⊑ Säugetier DL

↑ Formale Systeme / Logik

- Domain/Anwendungsgebiet

Aussagen: textuell: Ein Hund ist ein Säugetier

⇒ genauere, exakte Spezifikation

Aufgabe auf Meta-Ebene:

Formeln $\forall x\, F$ und $\neg\exists x : \neg F$ nicht "∧"

sind äquivalent

Notation → Folie 4

- sei F eine beliebige (geschlossene) Formel nicht "→" sondern Meta-Ebene

von der Form $\varphi(x)$ [z.B. $p(x)$]

Beweis auf Metaebene:

für alle Strukturen M: wenn $M \models \forall x : \varphi(x)$

genau beinhaltet

dann auch $M \models \neg\exists y : \neg\varphi(y)$

Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathcal{I}) \models_{\emptyset} \forall x\, \varphi(x)$

$\emptyset$: leere Variablenbelegung

gdw. für alle $d \in \mathcal{D}$: $\mathcal{M} \models_{\emptyset^d_x} \varphi(x)$

gdw. meta

es gibt kein $d \in \mathcal{D}$: $\mathcal{M} \not\models_{\emptyset^d_x} \varphi(x)$

gdw. es gibt kein $d \in \mathcal{D}$: $\mathcal{M} \models_{\emptyset^d_x} \neg\varphi(x)$

gdw. $\mathcal{M} \not\models_{\emptyset} \exists x: \neg\varphi(x)$

gdw. $\mathcal{M} \models \neg\exists x: \neg\varphi(x)$

$\Box$

Beweis auf Metaebene

Seien φ_1, φ_2 ~~...~~ beliebige Formeln:

Schreibe für " φ_1 äquivalent φ_2 "
(auf Metaebene)

$\varphi_1 \Longleftrightarrow \varphi_2$ $\Longleftrightarrow$: Metaebene

bedeutet

<u>für alle</u> M: $M \models \varphi_1$ <u>gdw.</u> $M \models \varphi_2$

Logische Folgerungsbeziehung $\Longrightarrow$

Wenn aus $M \models \varphi_1$ folgt daß $M \models \varphi_2$
dann schreibe

$$\varphi_1 \models \varphi_2$$

"entails"

d.h. logische Äquivalenz v. φ_1, φ_2:

$\varphi_1 \models \varphi_2$ und $\varphi_2 \models \varphi_1$

Wenn ich φ_1 weiß, kann ich φ_2 schließen?

⟹ Beweise

Metaebene: Spez $\models$ (Korrektheits) Eigenschaft ?

⟹ Beweistheorie:

gilt $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$?

genauer:

$\emptyset \models \underbrace{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}_{\text{FOL - Formel}}$?

nicht mehr auf Metaebene:

Frage:

Kann man Allgemeingültigkeit von Formeln beweisen?

⇒ Automatischer Reasoner

gegeben also:

$$\Phi \models \varphi \quad ?$$

⇒ nimm $\neg\varphi$ und versuche ein Modell

$$M \models \neg\varphi$$ zu finden

falls das klappt: φ nicht allg.g.

sonst: φ ist allg.g.

Zunächst Zwischenfrage: ← (nur eine Richtung machen)

Gilt $\forall x : \varphi(x) \models \neg \exists x : \neg \varphi(x)$?

Betrachte jetzt

$$\emptyset \models \underbrace{\forall x : \varphi(x) \rightarrow \neg \exists x : \neg \varphi(x)}_{\text{FOL-Formel}}$$

$\Downarrow$ Reasoner

R. sucht Gegenbsp. für

$$\neg(\ldots\ldots \rightarrow \ldots\ldots)$$

(1) $\neg(\forall x\, \varphi(x) \rightarrow \neg\exists x: \neg\varphi(x))$ → Analyse wie oben Folie „$A \wedge \neg B$"

(2) $\forall x\, \varphi(x)$

(3) $\neg(\neg\exists x: \neg\varphi(x))$

(4) $\exists x: \neg\varphi(x)$

$\varphi(X^{\nu})$

$\neg\varphi(c)$

X^{ν} interne Var. des Beweisers

neues Konstantensymbol c das soll dieses Element repräsentieren

$X^{\nu} \rightarrow c: \varphi(c)$

$\square$

Wahrheitstab. für

$\hat{=} \neg A \vee B$

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

dieser Fall interessant

φ_1 gilt

φ_2 gilt nicht

zurück

←

Bsp zu F. 56

Was ist die Bev. der Hauptstadt von D ?

?- country(_N, "D", _P, _A, Cap, CapProv)

-> Ergebnis

Cap/"Berlin" CapProv/"Berlin"

?- country(_N, "D", _P, _A, Cap, CapProv),
city(Cap, CapProv, "D", P, _L1, _L2)

-> Cap/... CapProv/...

P/3500000

alice vs Alice vs "Alice"

Signatur: Alice → kommt in Formeln vor

domain: alice, "Alice"

Formel: Emp(Alice)

Belegung:

$\varphi \models \text{Emp}(\text{Alice})$?

$I(\text{Alice})$

alice

Interpr.: $I(\text{Emp}) = \{ \ldots, \text{alice}, \ldots \}$ ja.

$\wp \models \text{Name}(\text{Alice}, \text{"Alice"})$? → ja

$I(\text{Name}) = \{ \ldots, (\text{alice}, \text{"Alice"}), \ldots \}$

$$\mathfrak{M} \models \exists d : \exists c : \mathrm{Name}(c, \text{"Alice"}) \wedge \mathrm{works\_for}(c, d).$$

?- Name(_C, "Alice"), works_for(_C, D)

D/sales

[illegible]