

**Exercise 1.2 (WinMoveGame)** Betrachten Sie das win-move-Game (Folie 104).

- Ein Knoten ist ein “win-Knoten”, wenn derjenige Spieler, der am Zug ist gewinnen kann. Ein Knoten ist ein “lose-Knoten”, wenn er verliert. Es wird angenommen, dass jeder Spieler optimal spielt.
- Betrachten Sie ein Spiel, das aus den Kanten  $(p_1, p_2)$ ,  $(p_2, p_3)$ , ...  $(p_{n-1}, p_n)$  besteht. Welche Knoten sind win-Knoten, welche Knoten sind lose-Knoten.
- Beschreiben Sie darauf basierend allgemein, welche Knoten in einem beliebigen Spiel win-Knoten sind, welche lose-Knoten sind, und welche Unentschieden sind.
  - betrachten Sie dabei zuerst nur Abzweige, z.B. ein Spiel, das aus den Kanten  $(p_1, p_2)$ ,  $(p_2, p_3)$ , ...,  $(p_{n-1}, p_n)$  und  $(p_2, p_{n+1})$ ,  $(p_{n+1}, p_{n+2})$ , ...,  $(p_{n+k-1}, p_{n+k})$  besteht.
  - betrachten Sie dann Zyklen, aus denen Pfade hinausführen.
- Wie entsprechen die logischen Quantoren dabei dem Gedanken “gewinnen wollen” bzw. “nicht verlieren wollen” und der Annahme einer optimalen Spielweise beider Teilnehmer?

- 
- Lineare Sequenz: der “letzte” Knoten  $p_n$  ist ein Lose-Knoten (wer dort am Zug ist, kann nicht ziehen), der vorletzte ein Win-Knoten und immer weiter abwechselnd.
  - Abzweige, keine Zyklen: ein Knoten ist ein win-Knoten, wenn *mindestens ein* Zug zu einem Lose-Knoten führt. Diesen Zug wählt derjenige, der gerade am Zug ist aus, und wird gewinnen. Ansonsten ist der Knoten ein Lose-Knoten. Mit dieser Argumentation kann man in einem nichtzyklischen Graphen alle Knoten entscheiden (“well-founded”).
  - Mit Zyklen gilt dasselbe: man kann feststellen, dass ein Knoten ein win-Knoten ist, wenn *mindestens ein* Zug zu einem Lose-Knoten führt. Damit lassen sich anhand der Ausgänge aus einem Zyklus *einige* Knoten bestimmen. Darauf aufbauend kann man wieder weitere Win- und Lose-Knoten im Zyklus bestimmen (wieder “well-founded” Argumentation).
  - Übrig bleiben Zyklen ohne Win-Ausgänge, in denen man beliebig lange kreiseln kann (“Unentschieden – Draw”), sowie Pfade, die in einen solchen Zyklus hineinführen.
  - Win-Knoten sind definiert wie in der logischen Regel:  
 $\text{win}(X) \leftarrow \exists Y : (\text{move}(X, Y) \wedge \text{lose}(Y)).$   
 Lose-Knoten ergeben sich dann daraus, dass man, egal wohin man zieht, auf einem Win-Knoten (win für den anderen) ankommt:  
 $\text{win}(X) \leftarrow \forall Y : (\text{move}(X, Y) \rightarrow \text{lose}(Y)).$   
 (Hinweis: die universell quantifizierte Teilformel ist trivialerweise erfüllt, wenn es keine Zugmöglichkeiten gibt).  
 Beide Mengen kann man well-founded gegenseitig berechnen (mit  $T_P$  bzw. dem minimalen Modell geht das nicht, da win und lose gegenseitig negativ voneinander abhängig sind).  
 Draw-Nodes sind “der Rest”.  
 Sie haben eine rekursive Charakterisierung: es gibt keine Züge zu einem Lose-Knoten (damit hätte man gewonnen), aber möglicherweise Züge zu Win-Knoten (wo der andere gewinnt, die man also nicht machen würde), und mindestens einen Zug zu einem Draw-Knoten:  
 $\text{draw}(X) \leftarrow (\forall Y : (\text{move}(X, Y) \rightarrow \neg \text{lose}(Y)) \wedge \exists Y : (\text{move}(X, Y) \wedge \text{draw}(Y))).$   
 Man kann dann auch (per Tableau) formal zeigen, dass diese Charakterisierung äquivalent zu “der Rest” ist.
- 

**Exercise 1.3 (Quantifiers)** Consider the following formulas:

$$(F_1) \quad \forall x : (p(x) \rightarrow \exists y : q(x, y))$$

$$(F_2) \quad \forall x : \exists y : (p(x) \rightarrow q(x, y))$$

$$(F_3) \quad \exists y : \forall x : (p(x) \rightarrow q(x, y))$$

Check the validity of the following claims:

- $F_1 \models F_2$
- $F_2 \models F_1$
- same for  $F_1$  and  $F_3$
- same for  $F_2$  and  $F_3$

First “think” about them, then use the tableau calculus to prove your claim.

---

$F_1$  und  $F_2$ : Die Aussagen können z.B. wie folgt gedeutet werden:

- $F_1$  “jedes Land hat eine Hauptstadt” – bzw. exakter: “für alle  $x$  gilt: wenn  $x$  ein Land ist, gibt es (für dieses  $x$ ) ein  $y$  das seine Hauptstadt ist”.
- $F_2$  ist damit  $\forall x : \exists y : (\text{country}(x) \rightarrow \text{cap}(x, y))$   
“für alle  $x$  gilt: man kann passend zu jedem  $x$  ein  $y$  finden, so dass, falls  $x$  ein Land ist,  $y$  dessen Hauptstadt ist”.

Auf den ersten Blick ist  $F_2$  schwerer zu verstehen (was soll es aussagen für diejenigen  $x$  die keine Länder sind?), bedeutet aber das gleiche wie  $F_1$ :

Zu allen  $x$ , die ein Land sind, wähle als  $y$  die jeweilige Hauptstadt; für diejenigen  $x$ , die kein Land sind, kann man  $y$  vollkommen beliebig wählen: dann ist  $\text{country}(x) \rightarrow \text{capital}(x, y)$  trivialerweise erfüllt.

**Diskussion: was bedeutet  $\models$ .**  $F_1 \models F_2$  (“aus  $F_1$  folgt logisch  $F_2$ ” bzw. “ $F_1$  logically entails  $F_2$ ”) wenn: “wann immer  $F_1$  erfüllt ist, ist auch  $F_2$  erfüllt”.

Formal: für alle  $\mathcal{M}$ , so dass  $\mathcal{M} \models F_1$ , gilt auch  $\mathcal{M} \models F_2$ .

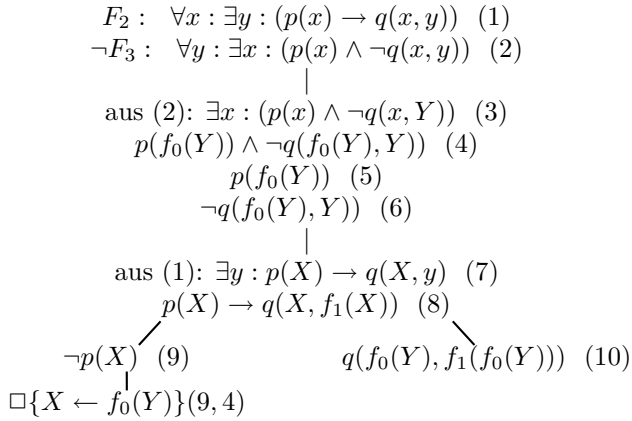
Das wiederum bedeutet: es gibt kein  $\mathcal{M}$ , so dass darin  $F_1$ , aber nicht  $F_2$  erfüllt ist. Oder, äquivalent, die Implikation  $F_1 \rightarrow F_2$  ist *allgemeingültig*.

Beides zeigt man, indem man ein Tableau über  $\neg(F_1 \rightarrow F_2)$  ansetzt (d.h. ein Modell dafür sucht), und es schließt: dann kann es ein solches Modell nicht geben. Äquivalent zu  $\neg(F_1 \rightarrow F_2)$  ist ja  $F_1 \wedge \neg F_2$ , womit man dann das Tableau beginnt.

**Tableaux** Zu  $F_1 \rightarrow F_2$ : zeige wie oben, dass  $F_1 \wedge \neg F_2$  unerfüllbar ist. Dazu kann man erstmal  $\neg F_2$  äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
 & \neg \forall x : \exists y : (p(x) \rightarrow q(x, y)) \\
 \Leftrightarrow & \exists x : \neg \exists y : (p(x) \rightarrow q(x, y)) \\
 \Leftrightarrow & \exists x : \forall y : \neg (p(x) \rightarrow q(x, y)) \\
 \Leftrightarrow & \exists x : \forall y : (p(x) \wedge \neg q(x, y))
 \end{aligned}$$





Man kann dieses Tableau nicht schliessen, auch wenn man es durch wiederholte Anwendung beliebiger Regeln beliebig expandiert (dies festzustellen ist aber auch eine nichttriviale Aufgabe für automatische Beweiser). (10) beschreibt, wie ein Gegenbeispiel aussieht: für jedes  $y$  gibt es ein  $f_0(y)$ , für das  $\neg q(f_0(y), y)$  gilt (d.h., Person  $f_0(y)$  kennt  $y$  nicht). Dennoch gibt es eine (andere) Person  $f_1(f_0(Y))$ , die  $f_0(Y)$  kennt. Dass  $f_1(f_0(Y))$  in dem Modell jemand anders als  $Y$  sein muss, folgt daraus, dass sonst (10) mit (6) geschlossen werden könnte.

Hinweis: wenn man  $F_2$  statt  $F_1$  nimmt, gibt es keine relevanten Unterschiede:  $f_1(X)$  tritt in beiden Fällen nur im rechten Ast auf.

---



---