Datenbanktheorie
Sommersemester 2012
Prof. Dr. W. May

3. Übungsblatt: Model Theory and Reasoning

Besprechung voraussichtlich am ??.6.2012

Aufgabe 1 (FOL: Entailment + Tableau) Geben Sie für die folgenden Paare von Formeln F und G an, ob eine die andere impliziert (falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an), und ob sie äquivalent sind.

Lösen Sie die Teilaufgaben erst durch Überlegen, und beweisen Sie sie dann mit dem Tableaukalkül. Beweisen

a) $F = (\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x))$, $G = \forall v : (p(v) \vee q(v))$.

b) $F = \forall x : ((\exists y : p(y)) \rightarrow q(x))$, $G = \forall v, w : (p(v) \rightarrow q(w))$.

c) $F = \forall x \exists y : p(x, y)$, $G = \exists w \forall v : p(v, w)$.

---

a) Es gilt $F \models G$.
Wenn alle Elemente des Domains in p oder alle in q sind, ist jedes einzelne auch in p oder in q.
$G \models F$ gilt nicht:
Sei $\mathcal{I} = (I, \mathcal{D})$ mit $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, $I(p) = \{(1)\}$, $I(q) = \{(2)\}$.
$\mathcal{I} \models G$, aber nicht $\mathcal{I} \models F$.
Damit sind F und G auch nicht äquivalent.
Als Tableau $F \models G$:
Anfangen mit $F \wedge \neg G$.

$$((\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x))) \wedge \neg\forall v : (p(v) \vee q(v)) \quad (1)$$
$$(\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x)) \quad (2)$$
$$\neg\forall v : (p(v) \vee q(v)) \quad (3)$$
zuerst (3) angehen, da (2) verzweigen würde:
$$\exists v : \neg(p(v) \vee q(v)) \quad (4)$$
Skolemkonstante, da keine freien Vars:
$$\neg(p(a) \vee q(a)) \quad (5)$$
$$\neg p(a) \quad (6)$$
$$\neg q(a) \quad (7)$$
jetzt (2):

/	\
$\forall x : p(x)$	$\forall x : q(x)$
$p(X)$	$q(Y)$
$\square$ $\{X/a\}$ mit (6)	$\square$ $\{Y/a\}$ mit (7)

Als Tableau $G \models F$ versuchen:
Anfangen mit $G \wedge \neg F$.

$$\forall v : (p(v) \lor q(v)) \land \neg((\forall x : p(x)) \lor (\forall x : q(x))) \quad (1)$$
$$\forall v : (p(v) \lor q(v)) \quad (2)$$
$$p(V) \lor q(V) \quad (3)$$
$$\neg((\forall x : p(x)) \lor (\forall x : q(x))) \quad (4)$$
$$\neg(\forall x : p(x)) \land \neg(\forall x : q(x)) \quad (5)$$
$$\neg(\forall x : p(x)) \quad (6)$$
$$\neg(\forall x : q(x)) \quad (7)$$
$$\neg p(a) \quad (6)$$
$$\neg q(b) \quad (6)$$

jetzt (3) auflösen:

$$\begin{array}{ccc} / & & \backslash \\ p(V) & & q(V) \\ \Box\ \{V/a\} & \cdots\cdots\cdots\rightarrow & q(a) \\ & & | \end{array}$$

(2) nochmal bereitstellen:

$$p(W) \lor q(W)$$
$$\begin{array}{ccc} / & & \backslash \\ p(W) & & q(W) \\ p(b) & \leftarrow\cdots\cdots & \Box\ \{W/b\} \end{array}$$

Dies ist ein Beispiel, wo man eine $\forall$-Formel mehrmals mit einer "für alles stehenden" Variable instantiiert.
Das kann man beliebig oft machen, es ist aber nur sinnvoll, wenn sich daraus "neue Erkenntnisse" ergeben, d.h. man die neue Variable mit einer Substitution schließen kann, die man vorher noch nicht hatte.

Der offene Ast gibt ein (einfachstes, typisches) Modell von $G \land \neg F$ an.

b) Es gilt $F \models G$, $G \models F$, und damit auch $F \equiv G$. Die Umformung ist eine logische Äquivalenzumformung.
Als Tableau $F \models G$:
Anfangen mit $F \land \neg G$.

$$\forall x : ((\exists y : p(y)) \rightarrow q(x)) \quad (1)$$
$$\neg\forall v, w : (p(v) \rightarrow q(w)) \quad (2)$$
$$\exists v : \neg\forall w : (p(v) \rightarrow q(w))$$
$$\neg\forall w : (p(a) \rightarrow q(w))$$
$$\neg(p(a) \rightarrow q(b))$$
$$p(a)$$
$$\neg q(b)$$

(1) auflösen:

$$(\exists y : p(y)) \rightarrow q(X)$$
$$\begin{array}{cc} / & \backslash \\ \neg\exists y : p(y) & q(X) \\ \neg p(Y) & \Box\ \{X/b\} \\ \Box\ \{Y/a\} & \end{array}$$

Als Tableau $G \models F$:
Anfangen mit $G \land \neg F$.

$$\forall v, w : (p(v) \rightarrow q(w)) \quad (1)$$
$$\neg\forall x : ((\exists y : p(y)) \rightarrow q(x)) \quad (2)$$
$$\neg((\exists y : p(y)) \rightarrow q(a))$$
$$\exists y : p(y)$$
$$\neg q(a))$$
$$p(b)$$
(1) auflösen:
$$p(V) \rightarrow q(W)$$
$$/ \qquad\qquad \backslash$$
$$\neg p(V) \qquad q(W)$$
$$\Box\ \{V/b\} \quad \Box\ \{W/a\}$$

c) Setze für $p(a, b)$ "a kennt b" ein. Also "jedes a kennt ein b" vs. "es gibt ein b, das von jedem a gekannt wird".
Es gilt $G \models F$:
Wenn es ein w gibt, so dass für jedes v $p(v, w)$ gilt, gibt es zu jedem x ein y (naemlich das, welches man als w nimmt), so dass $p(x, y)$ gilt.
$F \models G$ gilt nicht:
Sei $\mathcal{I} = (I, \mathcal{D})$ mit $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, $I(p) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.
$\mathcal{I} \models F$, aber nicht $\mathcal{I} \models G$.

Damit sind F und G auch nicht äquivalent.
Tableau für $F \models G$:

$$F \wedge \neg G$$
$$\forall x \exists y : p(x, y) \quad (1)$$
$$\neg\exists w \forall v : p(v, w) \quad (2)$$
$$\forall w : \neg\forall v : p(v, w) \quad (aus(2))$$
$$\neg\forall v : p(v, W)$$
$$\exists v : \neg p(v, W)$$
$$\neg p(f(W), W)$$
"wähle $f(W)$ passend zum W so, dass das $\neg p(v, W)$ gilt"
jetzt (1) auflösen:
$$\exists y : p(X, y)$$
$$p(X, g(X))$$

An dieser Stelle erkennt man, dass man das Tableau wegen der nicht zusammenpassenden Termstruktur der Argumente nicht schließen kann.
Tableau für $G \models F$:

$$G \wedge \neg F$$
$$\exists w \forall v : p(v, w) \quad (1)$$
$$\neg\forall x \exists y : p(x, y) \quad (2)$$
$$\exists x : \neg\exists y : p(x, y) \quad (3)$$
$$\neg\exists y : p(a, y) \quad (4)$$
$$\neg p(a, Y) \quad (5)$$
jetzt (1) auflösen:
$$\forall v : p(v, b)$$
$$p(V, b)$$
$$\Box\ \{V \rightarrow a, Y \rightarrow b\}$$

(5) bedeutet “für a gilt für alle Y $\neg p(a, Y)$” – “a kennt niemanden”. (7) bedeutet “für jedes V gilt $p(V, b)$” – “jeder kennt b”. Also insbesondere auch $V = a$, womit (5) “widerlegt ist”.

Aufgabe 2 (FOL: Erfüllbarkeit + Tableau) Gegeben ist die Formel

$$F = \forall x : (p(x) \wedge \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y)))$$

Ist sie erfüllbar oder nicht?

Beweisen Sie ihre Aussage mit dem Tableaukalkül.

Sie ist unerfüllbar.
Tableau für F:

$$\begin{array}{c}
\forall x : (p(x) \wedge \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y))) \quad (1) \\
p(X) \wedge \exists y(r(X, y) \wedge \neg p(y)) \quad (2) \\
p(X) \quad (3) \\
\exists y(r(X, y) \wedge \neg p(y)) \quad (4) \\
r(X, f(X)) \wedge \neg p(f(X)) \quad (5) \\
r(X, f(X)) \quad (6) \\
\neg p(f(X)) \quad (7)
\end{array}$$

kann man so nicht schließen: wenn man X durch $f(X)$ersetzt hat man $p(f(X))$ vs. $\neg p(f(f(X)))$

Nochmal (1) mit einer frischen Variable instantiieren:

$$\begin{array}{c}
p(Z) \wedge \exists y(r(Z, y) \wedge \neg p(y)) \quad (2') \\
p(Z) \quad (3') \\
\exists y(r(Z, y) \wedge \neg p(y)) \quad (4')
\end{array}$$

und jetzt mit (7) gegen (3’) schließen:

$$\square \ \{Z \rightarrow f(X)\}$$

Diese Aufgabe ist ein (weiteres) Beispiel dafür, dass es manchmal notwendig ist, eine allquantifizierte Formel mehrmals zu instantiieren, um sie auf mehrere “Objekte” anzuwenden (hier: ein beliebiges (X), sowie das zu X passende $y = f(X)$).
Zum Vergleich: machen Sie den Beweis für die äquivalente Formel

$$F' = (\forall x : p(x)) \wedge \forall x : (\exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y)))$$

Es ist also effizienter, den Scope eines Quantors möglichst klein zu halten, und separate Scopes für separate Teilaussagen zu verwenden.
